# AP 2008 – AI

1.0 Gegeben ist die reelle Funktion

$$f_k : x \mapsto -\frac{1}{2}x^3 + \frac{k}{2}x^2 + 2x - 2k \quad \text{mit } k \in \mathbb{R} \text{ und } D_{f_k} = \mathbb{R}.$$

Der Graph wird mit $G_{f_k}$ bezeichnet.

1.1 Zeigen Sie rechnerisch, dass der Graph $G_{f_k}$ für jedes k zwei relative Extremstellen besitzt. (4 BE)

1.2 Berechnen Sie die Steigung der Wendetangente des Graphen $G_{f_k}$.
Bestätigen oder widerlegen Sie anhand Ihres Ergebnisses die Aussage: "Für $k > 0$ gilt: Je größer der Wert von k, desto steiler die Tangente." (Ausführliche Rechnung nicht erforderlich!) (6 BE)

1.3 Weisen Sie nach, dass die Tangente an $G_{f_k}$ im Schnittpunkt mit der y-Achse eine von k unabhängige Steigung hat. (2 BE)

1.4 Bestimmen Sie denjenigen Wert von k, für den die Funktion an der Stelle $x_o = 2$ einen relativen Hochpunkt besitzt. (3 BE)

2.0 Nun wird $k = 2$ gesetzt. Man erhält also die Funktion $f_2$.

2.1 Zeigen Sie, dass der Funktionsterm von $f_2$ sich auch in der Form $f_2(x) = -\frac{1}{2}\left(x^2 - 4\right)(x - 2)$ schreiben lässt und bestimmen Sie sämtliche Nullstellen der Funktion und deren Vielfachheiten. (4 BE)

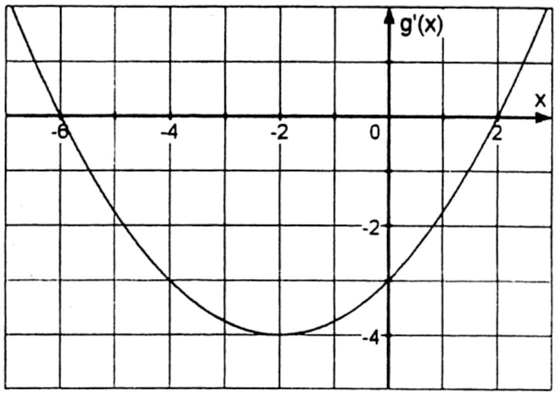
2.2 Berechnen Sie die maximalen Monotonieintervalle. Geben Sie mit deren Hilfe Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte an. (7 BE)

2.3 Zeichnen Sie mit Hilfe vorliegender Ergebnisse und geeigneter Funktionswerte den Graphen von $f_2$ im Bereich $-2{,}5 \le x \le 3$.
Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 1 cm. (4 BE)

2.4 Der Graph der Funktion $f_2$ schließt mit den beiden Koordinatenachsen eine vollständig im III. Quadranten liegende Fläche ein. Berechnen Sie deren Inhalt. (5 BE)

*Fortsetzung s. nächste Seite*

3.0 Die untere Abbildung zeigt den Graphen der **1. Ableitungsfunktion** $g'$ der Funktion $g\colon x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx$ mit $D_g = \mathbb{R}$.




3.1 Berechnen Sie mit Hilfe der Zeichnung den Funktionsterm g(x) der Funktion g. (7 BE)

3.2 Der Graph von g besitzt offensichtlich die Nullstelle $x = 0$. Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass es für $x > 0$ eine weitere Nullstelle von g geben muss. (4 BE)

3.3 Begründen Sie ohne Rechnung mit Hilfe der obigen Zeichnung, an welcher Stelle der Graph von g eine Wendestelle hat. (3 BE)

4.0 Aus einem Stück Draht der Länge 72 [cm] sollen die Kanten eines Quaders geformt werden, dessen Grundfläche ein Rechteck mit den Seitenlängen a bzw. 2a ist.

4.1 Berechnen Sie zunächst das Volumen V(a) des Quaders in Abhängigkeit von der Länge a. Geben Sie auch eine sinnvolle Definitionsmenge an. [Teilergebnis: $V(a) = 36a^2 - 6a^3$ ] (6 BE)

4.2 Bestimmen Sie nun denjenigen Wert von a, für den das Volumen V des Quaders sein absolutes Maximum annimmt. Berechnen Sie auch das maximale Volumen. (5 BE)